中信建投期货
CHINA FUTURES

CHINA FUTURES RESEARCH

期权介绍： 2014-01-07

期权价格及定价模型

期权（专题报告）

摘要：

1、期权的价值由时间价值与内在价值组成，期权价格＝期权内在价值＋期权时间价值。

2、期权价格的影响因素：

变量	欧式看涨	欧式看跌	美式看涨	美式看跌
标的资产市场价格	＋	－	＋	－
期权执行价格	－	＋	－	＋
有效期	？	？	＋	＋
标的资产价格波动率	＋	＋	＋	＋
无风险利率	？	？	？	？
红利	－	＋	－	＋

3、期权价格的上下限：

			上限	下限
欧式期权	看涨	无收益	S	$\max(S-Ke^{-r(T-t)},0)$
		有收益	S	$\max(S-D-Ke^{-r(T-t)},0)$
	看跌	无收益	$Ke^{-r(T-t)}$	$\max(Ke^{-r(T-t)}-S,0)$
		有收益	$Ke^{-r(T-t)}$	$\max(D+Ke^{-r(T-t)}-S,0)$
美式期权	看涨	无收益	S	$\max(S-Ke^{-r(T-t)},0)$
		有收益	S	$\max(S-D-Ke^{-r(T-t)},0)$
	看跌	无收益	K	$\max(K-S,0)$
		有收益	K	$\max(D+K-S,0)$

4、提前执行无收益资产的看涨期权是不合理的，而提前执行看跌期权和有收益资产的看涨期权，则可能是合理的。

5、无收益资产的欧式看涨期权和看跌期权的平价关系为：

$$c+Ke^{-r(T-t)}=p+S$$

有收益资产的欧式期权平价关系为：

$$c+D+Ke^{-r(T-t)}=p+S$$

美式看涨期权与看跌期权之间不存在平价关系。

作者姓名：邓璎函

dengyinghan@csc.com.cn
电话：023-86769758
期货从业资格号：F0299690

发布日期： 2014 年 1 月 7 日

相关研究报告

年月日	报告名称
2013-10-15	《期权套期保值系列之一：期权的 Delta 对冲策略对比分析》
2013-11-25	《期权介绍：期权的损益和交易策略》

后续研究报告

时间	报告名称
2014 年 1 月	《期权介绍：期权价格敏感性和套期保值》

目 录

图表目录

一、期权价格解析

尽管在现实的期权交易中，期权价格会受到多种因素的复杂影响，但从理论上说，期权价格都是由两个部分组成的：一是内在价值，二是时间价值。即期权价格＝期权内在价值＋期权时间价值。

1.1 期权的内在价值

期权的内在价值（Intrinsic Value）是指**期权合约本身所具有的价值，也就是期权多方行使期权时可以获得的收益的现值**。例如，如果白糖期货的市场价格为每吨 5000 元，而以白糖期货为标的资产的看涨期权执行价格为每吨 4900 元，那么这一看涨期权的购买方只要执行此期权即可获得 1000 元 （郑商所白糖期权仿真交易的交易单位为 10 吨）。这 1000 元的收益就是看涨期权的内在价值。

一个期权合约有无内在价值以及内在价值的大小，取决于该期权执行价格与其标的资产市场价格之间的关系，即与期权是实值、虚值还是平价有很大的关系。具体来看，理解期权的内在价值，需要注意两个方面的问题：

（1）欧式期权和美式期权内在价值存在一定的差异。

由于欧式期权只能在到期日执行，所以在到期以前的任一时刻，欧式期权的内在价值应该是到期时该期权内在价值的现值。因此，对于欧式看涨期权来说，其内在价值为S_T-K的现值。其中，如果标的资产在期权存续期内没有现金收益，S_T的现值就是当前的市价S，而对于支付现金收益的资产来说，S_T的现值则为$S-D$，其中D表示在期权有效期内标的资产现金收益的现值。因此，无收益资产欧式看涨期权的内在价值等于$S-Ke^{r(T-t)}$，而有收益资产欧式看涨期权的内在价值等于$S-D-Ke^{r(T-t)}$。同样道理，无收益资产欧式看跌期权的内在价值都为$Ke^{r(T-t)}-S$，有收益资产欧式看跌期权的内在价值都为$Ke^{r(T-t)}+D-S$。

美式期权与欧式期权的最大区别在于其可以提前执行，因此，美式期权的内在价值就应该等于其即时执行的收益，而无需对K进行贴现。但是，美式看涨期权当中，如果标的资产是没有现金收益的，在期权到期前提前行使无收益美式看涨期权是不明智的。因此无收益资产美式看涨期权价格等于欧式看涨期权价格，其内在价值也就等于$S-Ke^{r(T-t)}$。另外，有收益资产美式看涨期权虽然有提前执行的可能，但可能性较小，因此一般都认为其内在价值也等于$S-D-Ke^{r(T-t)}$，即也等于相应的欧式看涨期权内在价值。对于美式看跌期权来说，由于提前执行有可能是合理的，因此其内在价值与欧式看跌期权不同。其中，无收益资产美式期权的内在价值等于$K-S$，有收益资产美式期权的内在价值等于$K+D-S$。

因此，欧式期权和美式期权内在价值的主要差异就在于贴现与否，但现实生活中常常不考虑贴现问题，而将它们视为相同，都采用美式期权即时执行的内在价值。

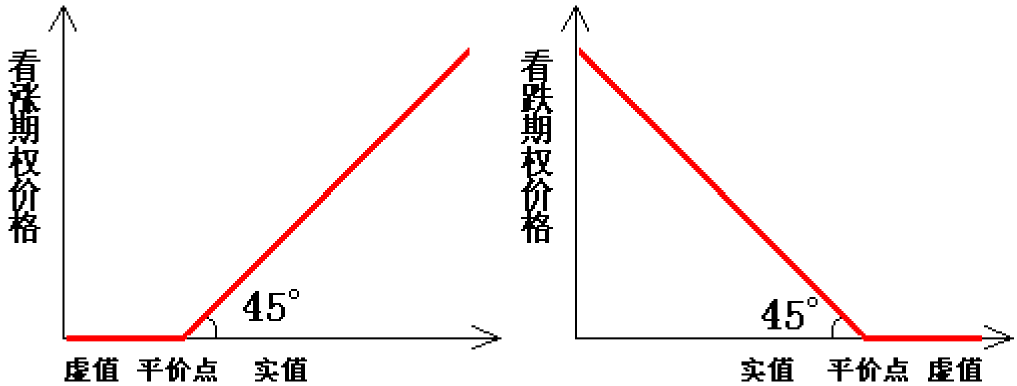
（2）期权的内在价值应大等于 0。

将期权的内在价值与实值、虚值和平价等相联系，从理论上说，实值期权内在价值为正，虚值期权内在价值为负，而平价期权内在价值为零。但从实际来看，期权多头方是不会执行虚值期权（即标的资产市价低于执

行价格的看涨期权和标的资产市价高于执行价格的看跌期权）的，因此内在价值至少等于零。

图 1 给出了期权内在价值的曲线。显然平价点随着欧式、美式期权和有无收益而变化。从图中我们可以进一步看出，在执行价格一定的时候，标的资产的市场价格就决定了期权内在价值的大小，例如对于看涨（看跌）期权来说，平价点及其左（右）侧的期权内在价值都为零，而平价点右（左）侧的期权内在价值则为正数，价格越高（低），内在价值越大。相反地，如果市场价格一定，期权的执行价格就决定了内在价值的大小。当执行价格提高（降低）时，图 1 中的两条内在价值线都要向右（左）移动，也就意味着在同一市场价格水平上，看涨期权的内在价值减少（增大），而看跌期权的内在价值则相应地增大（减少）。

图 1：期权内在价值曲线



看涨期权内在价值曲线　　看跌期权内在价值曲线

资料来源：中信建投期货

1.2 期权的时间价值

与平时所理解的时间价值（即无风险利率，货币持有者暂时放弃货币所获得的回报）不同，期权的时间价值（Time Value）是指在**期权有效期内标的资产价格波动为期权持有者带来收益的可能性所隐含的价值**。换句话说，期权的时间价值实质上是期权在其到期之前获利潜力的价值。期权的买方通过支付期权费，获得了相应的权利，即（近于）无限的收益可能和有限的损失。这意味着标的资产价格发生同样的上升和下降，所带来的期权价值的变化是不对称的，这一不对称性，使得期权总价值超过其内在价值，就是期权时间价值的根本来源。

与内在价值不同，期权的时间价值通常不易直接计算，因此，它一般是运用期权的总价值减去内在价值求得的。

影响期权时间价值大小的主要因素有：

（1）到期时间

由于期权时间价值代表到期之前期权带来收益的可能性。因此，距离到期的时间越长，期权时间价值一般来说越大。对于美式期权来说，这一点显然是肯定的；而欧式期权由于只能在到期日执行，所以这一关系不一

定成立，但总的来说其时间价值也是随着时间的延长而增大的。在一般情况下，期权的边际时间价值都是正的。

但是，随着时间的延长，期权时间价值的增幅是递减的。这一点对组建和分析期权差期组合和对角组合是很重要的。

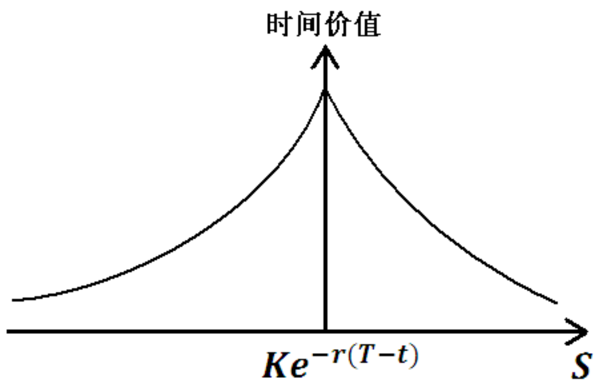
（2）标的资产价格的波动率

标的资产价格的波动率是指证券资产收益率单位时间内的标准差，因此，标的资产价格的波动率是用来衡量标的资产未来价格变动不确定性的指标。由于期权多头的最大亏损额仅限于期权价格，而最大盈利额则取决于执行期权时标的资产市场价格与执行价格的差额，因此波动率越大，无论是看涨期权还是看跌期权，期权的时间价值都应越大。

（3）内在价值

以无收益资产看涨期权为例，当$S=Ke^{-r(T-t)}$时，期权的时间价值最大。当$S-Ke^{-r(T-t)}$的绝对值增大时，期权的时间价值是递减的，如图 2 所示。

图 2：无收益资产看涨期权时间价值与$(S-Ke^{-r(T-t)})$的关系



资料来源：中信建投期货

二、期权价格的影响因素

期权价格既然由内在价值和时间价值两部分构成，则凡是影响内在价值和时间价值的因素，就是影响期权价格的因素。总的来看，期权价格的影响因素主要有六个，他们通过影响期权的内在价值和时间价值来影响期权的价格。

（1）标的资产的市场价格与期权的执行价格

标的资产的市场价格与期权的执行价格是影响期权价格最主要的因素。因为这两个价格及其相互关系不仅决定着内在价值，而且还进一步影响着时间价值。

由于看涨期权在执行时，其收益等于标的资产当时的市价与执行价格之差。因此，标的资产的价格越高、执行价格越低，看涨期权的价格就越高。对于看跌期权而言，由于执行时其收益等于执行价格与标的资产市价的差额，因此，标的资产的价格越低、执行价格越高，看跌期权的价格就越高。

（2）期权的有效期

对于美式期权而言，由于它可以在有效期内任何时间执行，有效期越长，期权多头获利机会就越大，而且有效期长的期权包含了有效期短的期权的所有执行机会，因此有效期越长，期权价格越高。

对于欧式期权而言，由于它只能在期末执行，有效期长的期权就不一定包含有效期短的期权的所有执行机会。但在一般情况下（即剔除标的资产支付大量收益这一特殊情况），由于有效期越长，标的资产的风险就越大，空头亏损的风险也越大，因此即使是欧式期权，有效期越长，其期权价格也越高，即期权的边际时间价值（Marginal Time Value）为正值。

另外，由于期权经常被作为避险保值的工具，而期权费则是保值者为了套期保值所支付的价格。所以，有效期越长，意味着保险时间越长，避险者所支付的保险费也应当越高。

（3）标的资产价格的波动率

标的资产价格的波动率对期权价格具有重要的影响。波动率对期权价格的影响，是通过对时间价值的影响而实现的。波动率越大，则在期权到期时，标的资产市场价格涨跌达到实值期权的可能性也就越大，而如果出现虚值期权，期权多头方亏损有限。因此，无论是看涨期权还是看跌期权，其时间价值以及整个期权价格都随着标的资产价格波动率的增大而增大，随标的资产价格波动率的减小而降低。

（4）无风险利率

影响期权价格的另一个重要因素是无风险利率，尤其是短期无风险利率。利率对期权价格的影响是比较复杂的，需要进行区别分析。不同的分析角度，结论各不相同。

首先，利率对期权价格的影响主要体现在对标的资产价格以及贴现率的影响上。

从静态上来看，无风险利率越高，标的资产的预期收益率也越高，对应于标的资产现在特定的市价S，未来期望价格$\mathrm{E}(S_T)$较高；同时由于贴现率较高，未来同样预期盈利的现值就较低。看涨期权的收益现值为：$\max(S_T-K,0)\times e^{-r(T-t)}$，对于看涨期权来说，前者将使期权价格上升，而后者将使期权价格下降，但前者的效应大于后者，因此对应于较高的无风险利率，看涨期权的价格较高。对于看跌期权来说，两种效应都是期权价格下降，因此对应于较高的无风险利率，看跌期权的价格较低。

从动态上来看，在标的资产价格与利率呈负相关时（如股票、债券等），同是贴现率也随之上升。当无风险利率提高时，原有均衡被打破，为了使标的资产预期收益率提高，均衡过程通常是通过同时降低标的资产的期初价格和预期未来价格，只是前者的降幅更大来实现的。对于看涨期权来说，对应于较高的无风险利率，看涨期权的价格较低。而对于看跌期权来说，前者效应为正，后者为负，但前者效应通常大于后者，因此对应于较

高的无风险利率，看跌期权的价格较高。

从两个角度得到的结论刚好相反。因此我们在具体运用时要注意区别分析的角度，根据具体情况作全面的、深入的分析。

其次，换一个讨论的角度，如果就利率本身对期权价格的影响而言，利率的变动对看涨期权价格有正向的影响，而对看跌期权的价格有反向的影响。这种影响在股票期权中表现得尤其明显。

除了以上两个角度的分析，也有人从期权费机会成本的角度来分析利率对期权价格的影响、由于期权费是在期权交易初期以现金方式直接支付的，因而具有机会成本。而这一机会成本显然取决于利率的高低：当无风险利率较高时，期权价格机会成本较高，投资者将把资金从期权市场转移到其他市场，从而导致期权价格下降；反之，当无风险利率较低时，较低的机会成本显然将带来期权价格的上升。

总之，无风险利率对期权价格的影响是非常复杂的，在具体运用的时候，需要全面分析，并针对特殊情况，判断哪种影响更重要，从而得到相应的结论。

（5）标的资产的收益

标的资产分红或者是获得相应现金收益的时候，期权合约并不进行相应的调整。这样，标的资产进行分红付息，将减少标的资产的价格，这些收益将归标的资产的持有者所有，同时执行价格并未进行相应调整。因此在期权有效期内标的资产产生现金收益将使看涨期权价格下降，而使看跌期权价格上升。

由以上分析可知，决定和影响期权价格的因素很多，而且各因素对期权价格的影响也很复杂，既有影响方向的不同，又有影响程度的不同；各个影响因素之间，既有相互补充的关系，又有相互抵消的关系。表 1 对这些主要影响因素作了一个基本的总结。

表 1：影响期权价格的主要因素

变量	欧式看涨	欧式看跌	美式看涨	美式看跌
标的资产市场价格	＋	－	＋	－
期权执行价格	－	＋	－	＋
有效期	?	?	＋	＋
标的资产价格波动率	＋	＋	＋	＋
无风险利率	?	?	?	?
红利	－	＋	－	＋

注：＋表示正向的影响，－表示反向的影响，？则表示影响方向不一定。数据来源：中信建投期货

三、期权价格的边界

假设c和p分别表示欧式看涨、看跌期权的价格，C和P分别表示美式看涨、看跌期权的价格，当前时刻为t时刻，期权标的资产的当前价格为S，期权在T时刻到期，T时刻标的资产的价格用S_T表示，期权的约定执行价格为K。

3.1 期权价格的上限

（1）看涨期权价格的上限

在任何情况下，期权的价值都不会超过标的资产的价格。否则的话，套利者就可以通过买入标的资产并卖出期权来获取无风险利润。因此，对于美式和欧式看涨期权来说，标的资产价格都是看涨期权价格的上限：

$$c \le S \text{ 和 } C \le S$$

（2）看跌期权价格的上限

由于美式看跌期权的多头执行期权得到的最高价值为执行价格K，因此，美式看跌期权购买方所支付的价格P不应该超过上限：

$$P \le K$$

由于欧式看跌期权只能在到期日（T 时刻）执行，在T时刻，其最高价值为K，因此，欧式看跌期权价格p不能超过K的现值：

$$p \le Ke^{-r(T-t)}$$

3.2 期权价格的下限

由于确定期权价格的下限较为复杂，我们这里先给出欧式期权价格的下限，并区分无收益与有收益标的资产两种情况。

（1）欧式看涨期权价格的下限

我们考虑如下两个组合：

组合 A：一份欧式看涨期权加上金额为$Ke^{-r(T-t)}$的现金

组合 B：一单位标的资产

在组合 A 中，如果现金按无风险利率投资则在T时刻将变为K，即等于执行价格。此时多头要不要执行看涨期权，取决于T时刻标的资产价格S_T是否大于K。若$S_T > K$，则执行看涨期权，组合 A 的价值为S_T；若$S_T < K$，则不执行看涨期权，组合 A 的价值为K。因此，在T时刻，组合 A 的价值为：

$$\max(S_T, K)$$

而在T时刻，组合 B 的价值为S_T。由于 ，因此，在t时刻组合 A 的价值也应大于等于组合 B，即：

$$c + Ke^{-r(T-t)} \ge S \Rightarrow c \ge S - Ke^{-r(T-t)}$$

由于期权的价值一定为正，因此无收益资产欧式看涨期权价格下限为：

$$c \geq \max\left(S - Ke^{-r(T-t)}, 0\right)$$

对于有收益资产欧式看涨期权，我们只要将上述组合 A 的现金改为$D + Ke^{-r(T-t)}$，其中D为期权有效期内资产收益的现值，并经过类似的推导，就可得出有收益资产欧式看涨期权价格的下限为：

$$c \geq \max\left(S - D - Ke^{-r(T-t)}, 0\right)$$

（2）欧式看跌期权价格的下限

我们考虑如下两个组合：

组合 C：一份欧式看跌期权加上一单位标的资产

组合 D：金额为$Ke^{-r(T-t)}$的现金

在T时刻，如果$S_T < K$，期权将被执行，组合 C 价值为K；如果$S_T > K$，期权将不被执行，组合 C 价值为 ST，即在组合 C 的价值为：

$$\max(S_T, K)$$

假定组合 D 的现金以无风险利率投资，则在T时刻组合 D 的价值为K。由于组合 C 的价值在T时刻大于等于组合 D，因此组合 C 的价值在t时刻也应大于等于组合 D，即：

$$p + S \geq Ke^{-r(T-t)} \Rightarrow p \geq Ke^{-r(T-t)} - S$$

由于期权价值一定为正，因此无收益资产欧式看跌期权价格下限为：

$$p \geq \max\left(Ke^{-r(T-t)} - S, 0\right)$$

对于有收益资产欧式看跌期权，我们只要将上述组合 D 的现金改为$D + Ke^{-r(T-t)}$，就可得到有收益资产欧式看跌期权价格的下限为：

$$p \geq \max\left(D + Ke^{-r(T-t)} - S, 0\right)$$

从以上分析可以看出，欧式期权的下限实际上就是其内在价值。

3.3 美式期权：是否需要提前执行

3.3.1 无收益资产的美式期权

（1）看涨期权

由于现金会产生收益，而提前执行看涨期权得到的标的资产无收益，再加上美式期权的时间价值总是为正的，因此我们可以直观地判断提前执行无收益资产的美式看涨期权是不明智的。为了精确地推导这个结论，我们考虑如下两个组合：

组合 A：一份美式看涨期权加上金额为$Ke^{-r(T-t)}$的现金

组合 B：一单位标的资产

在T时刻，组合 A 的现金变为K，组合 A 的价值为$\max(S_T, K)$。而组合 B 的价值为S_T，可见，组合 A 在T时刻的价值一定大于等于组合 B。这意味着，如果不提前执行，组合 A 的价值一定大于等于组合 B。

若在τ时刻提前执行，则提前执行看涨期权所得盈利等于$S_\tau - K$，其中S_τ表示τ时刻标的资产的市价，而此时现金金额变为$Ke^{-\hat{r}(T-\tau)}$，其中τ表示$T-\tau$时段的远期利率。因此，若提前执行的话，在τ时刻组合 A 的价值为：$S_\tau - K + Ke^{-\hat{r}(T-\tau)}$，而组合 B 的价值为$S_\tau$。由于$T > \tau$，$\hat{r} > 0$，因此$Ke^{-\hat{r}(T-\tau)} < K$。这就是说，若提前执行美式期权的话，组合 A 的价值将小于组合 B。

比较两种情况我们可以得出结论：提前执行无收益资产美式看涨期权是不明智的。因此，同一种无收益标的资产的美式看涨期权和欧式看涨期权的价值是相同的，即$C = c$。因此，无收益资产美式看涨期权价格的下限为：

$$C \geq \max\left(S - Ke^{-r(T-t)}, 0\right)$$

（2）看跌期权

为考察提前执行无收益资产美式看跌期权是否合理，我们考察如下两种组合：

组合 C：一份美式看跌期权加上一单位标的资产

组合 D：金额为$Ke^{-r(T-t)}$的现金

若不提前执行，则到 T 时刻，组合 C 的价值为$\max(S_T, K)$，组合 D 的价值为K，因此组合 C 的价值大于等于组合 D。

若在τ时刻提前执行，则组合 C 的价值为K，组合 D 的价值为$Ke^{-\hat{r}(T-\tau)}$，因此组合 C 的价值也高于组合 D。

比较这两种结果我们可以得出结论：是否提前执行无收益资产的美式看跌期权，主要取决于期权的实值额$K-S$、无风险利率水平等因素。一般来说，只有当S相对于K来说较低，或者r较高时，提前执行无收益资产美式看跌期权才可能是有利的。

由于美式期权可提前执行，因此其其他条件相同的美式期权与欧式期权相比，显然价格将更高，故而价值下限比欧式期权更严格：

$$P \geq \max(K-S,0)$$

3.3.2 有收益资产的美式期权

（1）看涨期权

由于提前执行有收益资产的美式期权可较早获得标的资产，从而获得现金收益，而现金收益可以派生利息，因此在一定条件下，提前执行有收益资产的美式看涨期权有可能是合理的。

我们假设在期权到期前，标的资产有n个除权日，$t_1, t_2, \cdots, t_n$为除权前的瞬时时刻，在这些时刻之后的收益分别为$D_1, D_2, \cdots, D_n$，在这些时刻的标的资产价格分别为$S_1, S_2, \cdots, S_n$。

由于在无收益的情况下，不应提前执行美式看涨期权，我们可以据此得到一个推论：在有收益情况下，只有在除权前的瞬时时刻提前执行美式看涨期权方有可能是最优的。因此我们只需推导在每个除权日前提前执行的可能性。

我们先来考察在最后一个除权日t_n提前执行的条件。如果在t_n时刻提前执行期权，则期权多方获得S_n-K的收益。若不提前执行，则标的资产价格将由于除权降到S_n-D_n。

根据有收益的欧式看涨期权下限，在t_n时刻期权的价值C_n：

$$C_n \geq c_n \geq \max\left(S_n - D_n - Ke^{-r(T-t_n)}, 0\right)$$

因此，如果$D_n \leq K\left(1-e^{-r(T-t_n)}\right)$，则在$t_n$提前执行是不明智的。相反，如果$D_n > K\left(1-e^{-r(T-t_n)}\right)$，则在$t_n$提前执行有可能是合理的。实际上，只有当$t_n$时刻的标的资产价格足够大时，提前执行美式看涨期权才是合理的。

同样，对于任意$\mathrm{i}<\mathrm{n}$，在$\mathrm{t_i}$时刻不能提前执行有收益资产的美式看涨期权条件是：

$$D_i \leq K\left(1-e^{-r(t_{i+1}-t_i)}\right)$$

由于存在提前执行更有利的可能性，有收益资产的美式看涨期权价值大于等于欧式看涨期权，但基本下限相同：

$$C \geq c \geq \max\left(S-D-Ke^{-r(T-t)}, 0\right)$$

（2）看跌期权

由于提前执行有收益资产的美式期权意味着自己放弃收益权，因此收益使美式看跌期权提前执行的可能性变小，但还不能排除提前执行的可能性。

通过同样的分析，我们可以得出美式看跌期权不能提前执行的条件是：

$$D_i \geq K\left(1-e^{-r(t_{i+1}-t_i)}\right) \text{ 或 } D_n \geq K\left(1-e^{-r(T-t_n)}\right)$$

由于美式看跌期权有提前执行的可能性，因此其下限为：

$$P \geq \max(D+K-S,0)$$

很显然，美式期权下限实际上也是其内在价值。

表 2 是对欧式/美式无收益/有收益的期权的上下边界的总结。

表 2：期权价格上下限

			上限	下限
欧式期权	看涨	无收益	S	$\max\left(S-Ke^{-r(T-t)},0\right)$
		有收益	S	$\max\left(S-D-Ke^{-r(T-t)},0\right)$
	看跌	无收益	$Ke^{-r(T-t)}$	$\max\left(Ke^{-r(T-t)}-S,0\right)$
		有收益	$Ke^{-r(T-t)}$	$\max\left(D+Ke^{-r(T-t)}-S,0\right)$
美式期权	看涨	无收益	S	$\max\left(S-Ke^{-r(T-t)},0\right)$
		有收益	S	$\max\left(S-D-Ke^{-r(T-t)},0\right)$
	看跌	无收益	K	$\max(K-S,0)$
		有收益	K	$\max(D+K-S,0)$

数据来源：中信建投期货

四、期权价格曲线的形状

期权价格是由内在价值和时间价值两部分组成的，其中最主要的影响因素是标的资产市场价格和期权合约执行价格，因此期权曲线图的横轴为标的资产价格，纵轴则为期权价格。事实上，期权价格曲线就是由图 1 和图 2 叠加而成。同时，看涨期权的上限总是等于标的资产价格，看跌期权的上限则等于执行价格或执行价格的现值；另外，期权的下限总是等于期权的内在价值。

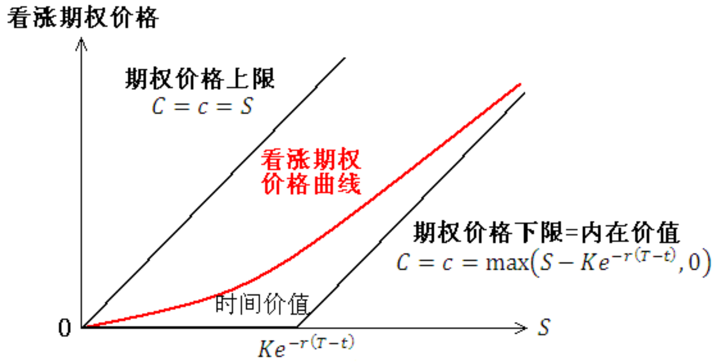
4.1 看涨期权价格曲线

由于欧式看涨期权和美式看涨期权的价格边界相同，所以可以将它们放在一起考察。

首先，在标的资产无收益的情况下，看涨期权价格的上限为S，下限为$\max\left(S-Ke^{-r(T-t)},0\right)$，即期权的内在价值。当内在价值等于零时，期权价格就等于时间价值。时间价值在$S=Ke^{-r(T-t)}$时最大；当S趋于 0 和∞时，时间价值也趋于 0，此时看涨期权价值分别趋于 0 和$S-Ke^{-r(T-t)}$。特别地，当$S=0$时，$C=c=0$。

此外，由于期权价格还受到标的资产价格波动率、无风险利率、到期期限等因素的影响。因此我们需要进一步考虑这些因素对期权价格曲线的影响。根据前文的分析，一般地，无风险利率越高、期权期限越长、标的资产价格波动率越大，则期权价格曲线以原点为中心，越往左上方旋转，但基本形状不变，而且不会超过上限，如图 3 所示。

图 3：无收益资产看涨期权价格曲线



资料来源：中信建投期货

有收益资产看涨期权价格曲线与图 3 类似，只是把$Ke^{-r(T-t)}$换成$Ke^{-r(T-t)} + D$，平价点发生了变化。

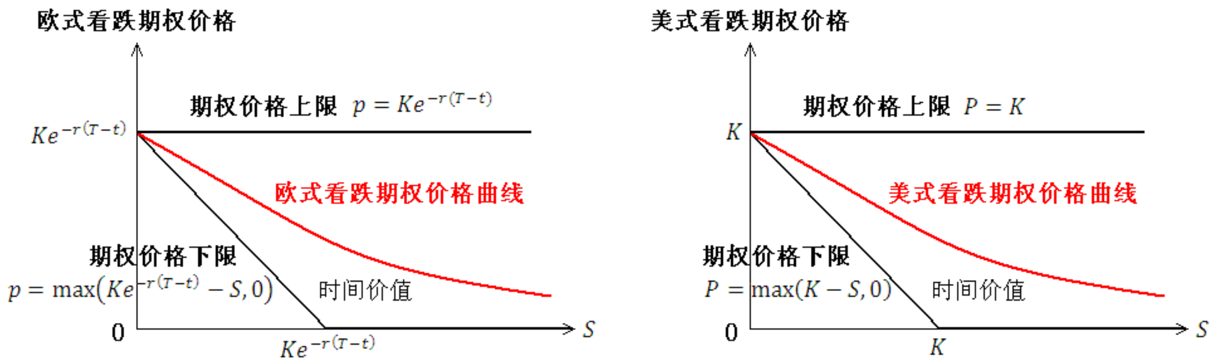
4.2 看跌期权价格曲线

（1）欧式看跌期权价格曲线

先考察无收益资产看跌期权的情形。欧式看跌期权的上限为$Ke^{-r(T-t)}$，下限为$\max(Ke^{-r(T-t)} - S, 0)$。当$Ke^{-r(T-t)} - S > 0$时，它就是欧式看跌期权的内在价值，也是其价格下限，当$Ke^{-r(T-t)} - S < 0$时，欧式看跌期权内在价值为 0，其期权价格等于时间价值。当$S = Ke^{-r(T-t)}$时，时间价值最大。当S趋于 0 和∞时，期权价格分别趋于$Ke^{-r(T-t)}$和 0。特别当$S = 0$时，$p = Ke^{-r(T-t)}$。

无风险利率越低、期权期限越长、标的资产价格波动率越高，看跌期权价值以 0 为中心越往右上方旋转，但不能超过上限，如图 4 左边所示。

图 4：无收益资产看跌期权价格曲线



欧式看跌期权价格曲线　　美式看跌期权价格曲线

资料来源：中信建投期货

有收益资产期权价格曲线与图 4 相似，只是把$Ke^{-r(T-t)}$换为$D+Ke^{-r(T-t)}$。

（2）美式看跌期权价格曲线

对于无收益标的资产来说，美式看跌期权上限为K，下限为$K-S$。但当标的资产价格足够低时，提前执行是明智的，此时期权的价值为$K-S$。因此当S较小时，看跌期权的曲线与其下限或者说内在价值$K-S$是重合的。当$S=K$时，期权时间价值最大。其它情况与欧式看跌期权类似，如图 4 右边所示。

有收益美式看跌期权价格曲线与图 4 相似，只是把K换成$D+K$。

五、看涨期权与看跌期权之间的平价关系

5.1 欧式看涨期权与看跌期权之间的平价关系

（1）无收益资产的欧式期权

在标的资产没有收益的情况下，为了推导c和p之间的关系，我们考虑如下两个组合：

组合 A：一份欧式看涨期权加上金额为$Ke^{-r(T-t)}$的现金

组合 B：一份有效期和协议价格与看涨期权相同的欧式看跌期权加上一单位标的资产

由于金额为$Ke^{-r(T-t)}$的现金以无风险利率投资，期权到期时正好获得等于执行价格K的资金，因此在期权到期时，两个组合的价值均为$\max(S_T,K)$。由于欧式期权不能提前执行，因此两组合在时刻t必须具有相等的价值，即：

$$c+Ke^{-r(T-t)}=p+S$$

这就是无收益资产欧式看涨期权与看跌期权之间的**平价关系（Parity）**。它表明欧式看涨期权的价值可根据相同协议价格和到期日的欧式看跌期权的价值推导出来，反之亦然。

如果式平价关系不成立，则存在无风险套利机会。套利活动将最终促使平价关系成立。

（2）有收益资产的欧式期权

在标的资产有收益的情况下，我们只要把前面的组合 A 中的现金改为$D+Ke^{-r(T-t)}$，因为组合 B 中持有的标的资产还能够获得现金收益，D即为这笔现金收益的现值。我们就可推导出有收益资产欧式看涨期权和看跌期权的平价关系：

$$c+D+Ke^{-r(T-t)}=p+S$$

从看涨期权和看跌期权的平价关系中我们可以对看涨期权和看跌期权的特性有更深入的了解。

根据无收益资产的看涨期权和看跌期权平价关系，看涨期权等价于借钱买入股票，并买入一个看跌期权来提供保险。和直接购买股票相比，看涨期权多头有两个优点：保险和可以利用杠杆效应。

根据有收益资产的看涨期权和看跌期权平价关系，在其它条件相同的情况下，如果红利的现值D增加，那么看涨期权的价值会下跌、看跌期权的价值会上涨。

5.2 美式看涨期权与看跌期权之间的平价关系

（1）无收益资产的美式期权

考虑以下两个组合：

组合 A：一份欧式看涨期权加上金额为K的现金

组合 B：一份美式看跌期权加上一单位标的资产

如果美式期权没有提前执行，则在T时刻组合 B 的价值为$\max(S_T, K)$，而此时组合 A 的价值为$\max(S_T, K) + Ke^{r(T-t)} - K$。因此组合 A 的价值大于组合 B。

如果美式期权在τ时刻提前执行，则在τ时刻，组合 B 的价值为K，而此时组合 A 的价值大于等于$Ke^{r(\tau-t)}$。因此组合 A 的价值也大于组合 B。

这就是说，无论美式组合是否提前执行，组合 A 的价值都高于组合 B，因此在t时刻，组合 A 的价值也应高于组合 B，即：

$$c + K > P + S$$

由于$c = C$，有：

$$C + K > P + S \;\Rightarrow\; C - P > S - K$$

而又由于$P > p$，且对于无收益资产看涨期权来说$c = C$，有：

$$P > p = c + Ke^{-r(T-t)} - S = C + Ke^{-r(T-t)} - S$$

因此：

$$S - K < C - P < S - Ke^{-r(T-t)}$$

由于美式期权可能提前执行，因此我们得不到美式看涨期权和看跌期权的精确平价关系，但我们可以得出结论：无收益美式期权必须符合上述不等式。

（2）有收益资产美式期权

同样，我们只要把组合 A 的现金改为$D+K$，就可得到有收益资产美式期权必须遵守的不等式：

$$S-D-K<C-P<S-D-Ke^{-r(T-t)}$$

六、期权定价理论

6.1 Black-Scholes-Merton 期权定价模型

BSM 模型的假设条件如下：

- 标的资产价格变动是连续的，并遵循均值与波动率为常数的随机过程（几何布朗运动）；
- 短期无风险利率是一个常数,，且对所有到期日相同；
- 允许使用全部所得卖空衍生证券；
- 没有交易费用或税收，所有证券都是高度可分的；
- 证券交易是连续的；
- 不存在无风险套利；
- 欧式期权。

在上述假设条件下，根据无套利定价思想，Black and Scholes(1973)通过构造期权和标的资产的无风险组合，推导出期权定价的偏微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2c}{\partial S^2}+rS\frac{\partial c}{\partial S}+\frac{\partial c}{\partial t}=rc$$

然后结合边界条件$c(S_T,T)=\max\{S_T-K,0\}$，求解微分方程得到期权价值的解析解。

看涨期权定价公式：

$$c=S_0e^{-qT}N(d_1)-Ke^{-rT}N(d_2)$$

看跌期权定价公式：

$$p=Ke^{-rT}N(-d_2)-S_0e^{-qT}N(-d_1)$$

其中，

$$d_1=\frac{ln(S_0/K)+(r-q+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},\qquad d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}$$

S_0是 0 时刻标的资产价格，K是执行价格，r是连续复利的无风险利率，q是连续支付的红利率，σ是标的资产价格的波动率，T是期权到期期限。$N(x)$是标准正态分布变量的累计概率分布函数。

6.2 Cox-Ross-Rubinstein 二叉树期权定价模型

二叉树股指方法中将期权有效期分为很多很小的时间间隔Δt，假设在每一个时间段内标的资产价值从开始的S_t运动到两个新值$S_t u$和$S_t d$中的一个，$u > 1$，$d < 1$，因此S_t到$S_t u$是价格“上升”运动，S_t到$S_t d$是价格“下降”运动。根据风险中性估值可得：

上升幅度

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

下升幅度

$$d = \frac{1}{u}$$

上升的概率

$$\pi_u = \frac{e^{(r-q)\Delta t} - d}{u - d}$$

下降的概率

$$\pi_d = 1 - \pi_u$$

假设看涨期权的有效期被分成N个长度为Δt的小段。设(i,j)为$i\Delta t$时刻的第j个节点，其中$0 \le i \le N, 0 \le j \le i$. 定义$f_{i,j}$为节点$(i,j)$的期权值，在节点$(i,j)$的股票价格为$S_0(1-q)u^{j-1}d^{i-j}$。由于看涨期权在到期日的价值为$\max\{S_T - K, 0\}$，则

$$f_{N,j} = \max\{S_0(1-q)u^{j-1}d^{N-j} - K, 0\}$$

而节点(i,j)的概率为$\pi_u^{j-1}\pi_d^{i-j}$，注意到$\sum_j \pi_u^{j-1}\pi_d^{i-j} = 1$。于是看涨期权的现值为

$$c = C = f_{1,1} = e^{-rN\Delta t} \cdot \left(\sum_j \pi_u^{j-1}\pi_d^{N-j} \cdot f_{N,j}\right)$$

同理，欧式看跌期权有

$$f_{N,j} = \max\{K - S_0(1-q)u^{j-1}d^{N-j}, 0\}$$

$$p = f_{1,1} = e^{-rN\Delta t} \cdot \left(\sum_j \pi_u^{j-1}\pi_d^{N-j} \cdot f_{N,j}\right)$$

但对于美式看跌期权，就要考虑是否提前执行期权，不提前执行时，由风险中性公式：

$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t}[\pi_u f_{i+1,j+1} + \pi_d f_{i+1,j}] \quad (0 \le i \le N-1, 0 \le j \le i)$$

$f_{i,j}$必须与内在价值进行比较，于是

$$f_{i,j} = \max\left\{K - S_0(1-q)u^{j-1}d^{i-j}, e^{-r\Delta t}\left[\pi_u f_{i+1,j+1} + \pi_d f_{i+1,j}\right]\right\}$$

$$P = f_{1,1}$$

BSM 模型只针对欧式期权，不能对美式期权定价。对美式期权和持有者在到期前可做出提前执行决策的其他衍生证券进行估值时，二叉树是非常有效的方法。此外，二叉树也可以用来计算 delta、gamma、vega 等。由于假设相同，随着二叉树模型时间步数增加，二叉树模型给出的欧式期权价格逐渐收敛于 BSM 模型价格。

重要声明

联系我们

中信建投期货总部
重庆市渝中区中山三路107号皇冠大厦11楼
电话：023-86769605

上海世纪大道营业部
地址：上海市浦东新区世纪大道 1589 号长泰国际金融大厦 8 楼 808-811 单元
电话：021- 68765927

长沙营业部
地址：长沙市芙蓉区五一大道 800 号中隆国际大厦 903 号
电话：0731-82681681

南昌营业部
地址：江西南昌西湖区八一大道 96 号华龙国际大厦 1303-1305
电话：0791-6700300

廊坊营业部
地址：河北省廊坊市广阳区广阳道 20 号中太大厦 7 楼
电话：0316-2326908

漳州营业部
地址：福建省漳州市芗城区南昌路华联商厦七楼
电话：0596-6161566

合肥营业部
地址：合肥市马鞍山路 130 号万达广场 C 区 6 幢 1903、1904、1905 室
电话：0551-2876855

西安营业部
地址：西安市高新区科技路 38 号林凯国际大厦 1604,05 室
电话：029-68500986

北京营业部
地址：北京市东城区朝阳门北大街 6 号首创大厦 207 室
电话：010-85282866

济南营业部
地址：济南市泺源大街 150 号中信广场 6 楼 606 房间
电话：0531-85180636

大连营业部
地址：大连市沙河口区会展路 129 号国际金融中心 A 座期货大厦 2904 号房间
电话：0411-84806305

郑州营业部
地址：郑州市未来大道 69 号未来大厦 2211、2205 室
电话：0371-65612397

广州营业部
地址：广州市越秀区东风中路 410-412 号时代地产中心 704A、705-06 房
电话：020-28325288

重庆龙山一路营业部
地址：重庆市渝北区龙山街道龙山一路 5 号扬子江商务中心 10 楼 2 号、5 号
电话：023-88502020

成都营业部
地址：成都市武侯区科华北路 62 号力宝大厦南楼 1802
电话：028-628187700

深圳营业部
地址：广东省深圳市福田区深南大道和泰然大道交汇处绿景纪元大厦 11 楼 I 单元
电话：0755-33378759

杭州营业部
地址：杭州庆春路 137 号华都大厦 811，812
电话：0571-28056985
传真：0571-87079379

全国统一客服电话：400-8877-780
网址：www.cfc108.com