# 期权定价理论与方法综述

期权定价理论是现代金融学基础之一。在对金融衍生品研究中，期权定价的模型与方法是最重要、应用最广泛、难度最大的一种。1973年，被誉为“华尔街第二次革命” B-S-M期权定价模型正式提出，随之成为现代期权定价研究的基石。这与现代期权在1973年的上市一起，标志着金融衍生品发展的关键转折。现代期权定价的理论和方法在国外经过三十多年的发展已经日趋成熟。随着沪深300股指期权的积极推进，国内金融市场或将迎来期权这一全新金融工具。因此，国内期权定价的研究会更具发展前景和现实意义。

期权最重要的用途之一是管理风险，要对风险进行有效的管理，就必须对期权进行正确的估价。期权定价理论和方法的产生和完善对于推动期权市场的发展起到了巨大的作用。期权定价研究得出的基本原理和方法被广泛应用于宏观、微观的经济和管理问题的分析和决策，其中在财务方面的应用最为集中，以及在投资决策等方面都有广泛的应用。

本文主要是对期权定价的综述，内容包括两个方面：

1. 期权定价理论模型
   1. B-S-M模型之前的期权定价理论
   2. B-S-M模型
   3. B-S-M模型之后的期权定价理论
2. 期权定价数值方法
   1. 树形方法
   2. 蒙特卡洛模拟
   3. 有限差分方法
   4. 新兴方法：神经网络
   5. 非完全市场下的期权定价方法

## 期权定价理论模型的发展

#### B-S-M模型之前的期权定价理论

历史上的期权交易可以追溯到古希腊时期，并于17世纪荷兰“郁金香投机泡沫”和18世纪美国农产品交易中相继出现。期权定价的理论模型的历史却比较短。期权定价理论的研究始于1900年，由法国数学家巴舍利耶（L.Bachelier）在博士论文《投机理论》中提出。他首次引入了对布朗运动的数学描述，并认为股票价格变化过程就是一个无漂移的标准算术布朗运动。这一发现沉寂了五十年后才被金融界所接受，被称为“随机游走”或“酒鬼乱步”。巴舍利耶在此基础上，通过高斯概率密度函数将布朗运动和热传导方程联系起来，得出到期日看涨期权的期望值公式：



其中S是股票价格，K是期权执行价格，是股票价格遵循的布朗运动的方差，T是期权期限，与是标准正态分布的分布函数和密度函数。

这一模型的主要缺陷是绝对布朗运动允许股票价格为负，并可推导出股票价格变化期望为零的结论。这与现实不符，也未考虑资金的时间价值，在提出后几十年时间里并没有得到重视。但其蕴含的随机游走思想与引入布朗运动描述股票价格变动，都具有开创性意义。巴舍利耶的期权定价理论标志着金融数学的诞生。

上世纪四十年代，概率论和随机过程的发展为期权定价理论进一步奠定了数学基础，特别是日本数学家伊藤清建立了Ito随机微分方程和Ito过程。这成为金融领域中的基本数学工具，在期权定价领域非常重要。在巴舍利耶之后的半个多世纪，期权定价理论的发展集中在特定的计量模型上。卡索夫（S.Kassouf）是其中最杰出的一位，他建立了以下公式估计看涨期权价格V：

 (是待估参数)

卡索夫利用到期时间、分红及其它变量估计参数

在学术界对巴舍利耶的再发现拖延了半个多世纪后，曾在二战中协助冯•诺依曼发明第一台计算机的美国统计学家萨维奇(L.Savage)于1955年向包括萨缪尔森(P.Samuelson)在内的经济学家寄出明信片，推荐巴舍利耶的博士论文中的研究成果。在萨缪尔森极力推荐和传播下，巴舍利耶的期权定价理论吸引了众多顶尖人才的研究，并最终导致了B-S-M模型这一承前启后集大成者的诞生。

1961年，斯普里克尔(C.Sprenkle)假定股票价格服从具有固定均值和方差的对数正态分布，这样就消除了巴舍利耶公式中股票价格为负的可能性。同时允许正向漂移，考虑了利率和风险厌恶。但该模型仍然忽略了资金的时间价值。斯普里克尔的看涨期权定价公式为：



其中是股票的预期收益率，则是风险厌恶的度量。

1964年，博内斯(J.Boness)提出了类似的模型，同时考虑了货币的时间价值。他考虑了风险保险的重要性，认为投资者“不在乎风险”。他的推导仍需建立在风险中性的假设基础上，否则他将推导出B-S-M模型。博内斯的期权定价模型为：



1965年，萨缪尔森提出一个欧式看张期权定价模型。他考虑到因风险特性的差异，期权和股票的预期收益率并不一致，认为期权应该有一个更高的平均收益率。他提出的定价模型为：



对比易得，博内斯模型是萨缪尔森模型的特例(当=)

1969年，萨缪尔森和莫顿(R.Merton)使用一种资产组合选择的简单均衡模型检验期权定价理论，允许内生的股票和期权的预期收益。他们证明了期权问题可以用函数形式的“公共概率”项来表示，这种函数形式与用真实概率所表述的问题一样。采用这种方式，调整过的股票预期收益率和期权预期收益率是一样的。这一方法实际上体现了现在期权定价里的风险中性思想。

1973年B-S-M模型之前的期权定价理论都缺乏实用价值，被称为“不完全模式”。巴舍利耶模型的主要缺点是绝对布朗运动假设带来股票为负的可能性，这与公司责任的有限性矛盾。卡索夫的计量模型缺乏微观基础。斯普里克尔和萨缪尔森的公式里都有两个主观变量，难以实证。博内斯与B-S-M模型的一步之遥在于其对风险中性是假定的。但期权定价理论的发展是一脉相承的，他们的工作为随后的B-S-M模型奠定了基础。

#### B-S-M模型

1973年，美国芝加哥大学教授布莱克(F.Black)和舒尔斯(M.Scholes)发表《期权与公司负债定价》一文，提出了B-S-M模型。一个月后，芝加哥期权交易所正式挂牌第一个标准化期权合约。德州仪器随即推出固化了B-S-M公式的期权计算器，并迅速得以推广。同年麻省理工学院的莫顿(R.C. Merton)独立的提出一个更为一般化的模型，并提出了一系列的改进和完善。B-S-M模型就以此迅速成为一场里程碑式的革命，影响深远。不仅为创立者赢得了1997年诺贝尔经济学奖的殊荣，也在期权定价实践中占据着主导地位，至今无可取代。

B-S-M模型给出了欧式股票期权的定价公式，但其模型建立在严格的假设前提之上，包含以下六点：

1. 股票价格的随机过程-遵从几何布朗运动**：；**

是股票价格，为股票的期望收益率，则是股价波动率，是布朗运动(又称维纳过程)。由该方程可知着股价在短时期内的变动来源于两个方面：一是单位时间内已知的一个收益率变化，被称为漂移率，可以理解为总体的变化趋势。二是随机波动项，即，是随机波动使得股票价格变动偏离总体趋势的部分。

1. 股票在期权有效期内无红利及其它现金收益；

联系第一点，可知股价的变动是连续而均匀的，不存在突然的跳跃。

1. 市场是无摩擦的：不存在税收和交易费用；

联系第二点，可知投资者的收益仅来源于价格的变动，而没有其他影响因素。

1. 允许卖空股票，且股票是完全可分的；
2. 无风险利率为常数，投资者能以此利率贷入资金；
3. 不存在无风险套利机会。

B-S-M模型给期权定价的基本思想是无套利复制。股票价格与期权价格都受同一种不确定性的影响，两者遵循相同的几何布朗运动，只是对随机因素变化的反应程度不同。通过构造一个包含恰当数量标的股票和期权的投资组合，可以消除不确定性，构成一个无风险的资产组合。在一个无套利市场中，该资产组合的收益必定等于无风险利率。由此可以得到期权价格的B-S-M微分方程：



其中f是期权价格，t为某时刻，S是股票价格，则是股价波动率，r是无风险利率。再结合欧式期权的边界条件：

（看涨期权）

（看跌期权）

K是期权的执行价格，t取值为期权到期日T。可以得到B-S-M微分方程的解析解，这就是B-S-M模型的期权定价公式：

（看涨期权）

（看跌期权）

其中：





是标准正态分布的累积概率分布函数，是0时刻的股价。

B-S-M模型微分方程和期权定价公式的特点之一是：不再有主观变量。因为消去了漂移项-股票的期望收益率，不包含任何反映投资者风险偏好的变量，所以无需对风险中性进行假定。期权的合理价格与投资者的风险偏好无关，风险中性定价成为衍生品定价中的重要方法。这和直觉有悖，对这一点的理论证明涉及后来金融研究中的测度论、鞅和在金融衍生品中极其重要的吉尔萨诺(Girsanov)定理。

在B-S-M模型中，期权价格所依赖的变量都是可观察得到的：股价、执行价格、到期期限、无风险利率、和股价的波动率(可由历史数据估计)，使得B-S-M模型使用非常方便。

B-S-M微分方程也适用于其它金融衍生品，而不仅仅限于期权。只是在不同的边界条件下，数学上可能找不到衍生品价格对应的解析解，需要用数值方法来求解其价格。B-S-M模型在其他经济领域也有广泛的应用，比如公司资产结构问题、可转化债定价等方面。

对B-S-M模型的检验和评价方面：

1977年伽莱(Galai)利用芝加哥期权交易所的股票期权的数据，首次对B-S-M模型进行了检验。此后，不少学者在这方面做出了有益的探索。其中比较有影响的代表人物有特里皮(Trippi)､奇拉斯(Chiras)､曼纳斯特(Manuster)等。综合起来，这些检验得到一些普遍性的看法：

* 1. 模型对平值期权的估价令人满意，特别是对剩余有效期限超过两月，且不支付红利者效果尤佳。
  2. 对于高度实值或虚值的期权，模型的定价有较大偏差，会高估虚值期权而低估实值期权。
  3. 对临近到期日的期权的估价存在较大误差。
  4. 离散度过高或过低的情况下，定价有一定误差。

总体而言，虽然存在误差，B-S-M模型仍是相当准确的，是具有较强实用价值的定价模型。B-S-M之后提出的定价模型大多是在某个特定方面对其改进，模型的参数和复杂度递增，定价效率和精度却没有实质性的提高，常常无法得到明确和应用性强的结论。正因如此，B-S-M模型在期权定价中的基础性地位一直无可替代。

#### B-S-M模型之后的期权定价理论

B-S-M模型为金融衍生品市场的发展铺平了道路，在实践中也得到充分的检验。但局限性在于其严格的前提假设和实际金融市场的不符。这削弱了其定价的效率、精度和适用性。而后的期权定价理论在B-S-M模型基础上做了大量的改进，主线有两条：一、放松其前提假设以符合实际；二、推广到更复杂的衍生品定价：

1. 标的资产价格的随机过程假定的放松是最主要的一方面。标的资产价格并不完全是一个几何布朗运动，对数正态分布也不能完全刻画资产价格。针对现实中的资产回报的非对称、尖峰厚尾、跳跃、波动率不恒定等情况，期权定价理论不断提出新的改进。
2. 对市场无摩擦条件的放松，考虑交易成本下的期权定价。
3. 考虑资产红利时和无风险利率不恒定时的期权定价。
4. 非欧式期权定价：美式期权、奇异期权的定价更加复杂。
5. 非股票期权：利率期权、外汇期权等标的物不是股票的情况。
6. 非完全金融市场下的期权定价：B-S-M模型的内涵是无套利复制定价思想，在非完全市场中期权无法完全复制，价格是一个区间而非确定的值。

这些内容就构成了B-S-M模型提出后迄今的期权定价理论的进展，限于篇幅，主要简述标的资产价格随机过程条件的放松。这点的改进主要有两个方向：跳跃扩散和随机波动率。

##### 跳跃-扩散模型(Jump-Diffusion)：

B-S-M模型假设股价是连续光滑变动的，服从对数正态分布。但宏观和微观的各类突发事件使股价存在短时间内的大幅变动，比如战争、政策的制定、市场崩溃及其它各类“黑天鹅事件”都能给股价带来巨大的冲击。这种冲击带来的离散间断的股价跳跃往往幅度过大、频率过多，几何布朗运动无法描述和扑捉这些现象。莫顿(R. Merton)1976年放宽了B-S-M模型对股价连续变动的假设，引入了一个泊松运动与几何布朗运动结合来描述股价变动同时存在连续和非连续的情况。这类模型被称为跳跃-扩散模型。股价的复合运动的随机过程为：



其中是股票瞬时期望收益率，是泊松分布的强度，是平均跳跃幅度，是泊松运动。随机跳跃的加入扩展了标的资产价格所遵循的随机过程，在此基础上莫顿改进了B-S-M模型的定价公式并得到解析解。但莫顿假设随机跳跃是非系统风险，这在简化模型的同时也构成该模型的缺陷。考克斯(J.Cox)、罗斯(S. A. Ross)、鲁宾斯坦（M.Rubinstein）对跳跃-扩散模型提出进一步的改进和完善。

值得一提的是莫顿在1973年将B-S-M模型扩展到考虑红利和随机利率的情况，这使得期权定价更加贴近市场实际。只是对股票期权定价而言，股利和无风险利率影响甚微。这点被后来的斯科特(L.Scott)于1997年证明。

##### 随机波动率模型(SV)

在B-S-M模型中波动率是一个由标的资产决定的常数，这点被实证否定。因为市场数据显示的隐含波动率往往随着执行价格的不同而变化，呈现“波动率微笑”和“波动率倾斜”。隐含波动率也会随着期权到期时间的不同而变化，呈现“波动率期限结构”。这说明波动率本身就是一个随机变量。

最早考虑随机波动率因素的期权定价模型是CEV模型，由考克斯和罗斯在1976年提出，他们推导了收益率方差与股价成比例的情况下期权的定价。但该模型严格假定波动率是股价的函数，认为股价的高低直接决定波动率的大小。这未考虑波动率与股价会受同一不确定性影响。赫尔(J.Hull)、怀特(A.White)、斯科特(L.Scott)于1987年研究了波动率随机扩散条件下的期权定价问题。在前提假设：(1)波动率风险溢价为零 (2)股票价格和波动率的风险源不相关的基础上，根据风险中性定价思想，推导出实质相同的随机波动率期权定价模型。这样的假设仅仅是方便模型的推导，并不符合实际。

赫斯顿(H.Heston)之前的随机波动率模型往往无法得出解析解，对波动率的假设也与实际偏差较大。赫斯顿在赫尔(J.Hull)等人的基础上，假定波动率平方服从几何布朗运动。以波动率风险溢价不为零及波动率与股价相关系数不为零的前提下推导出真正具有实际意义的随机波动率模型，并且得到期权的解析解。赫斯顿假定股票价格的随机过程为：





其中，，是方程回归均值的速度，是方程的长期均值，是股票收益率方差的波动率，是股价布朗运动，是的布朗运动。由无套利复制思想，可得随机波动率期权价格应满足的偏微分方程：



其中，即波动率的风险溢价与资产收益率方差成正比。该微分方程结合边界条件，可以得出随机波动率期权价格的解析解。

赫斯顿的随机波动率模型是期权定价理论发展中的一次重大突破，考虑了随机波动率的期权定价模型在理论上会提高定价的精度，实证上也证明了这一点。

##### 考虑交易成本的期权定价理论

B-S-M模型的一个前提假定是交易成本为零，可以进行连续动态调整的套期保值。事实上交易成本总是存在的，这使合理的期权价格是一个区间而非一个数值。不仅如此，交易成本的存在将无法保证连续动态组合调整和无风险资产组合的存在，从而在根本上威胁到风险中性定价的基础。厦门大学的郑振龙教授对交易成本的影响有进一步的总结：

1. 规模效应和交易成本差异化。交易规模越大，交易成本越低。不同投资者的交易成本不同。
2. 交易成本对保值者而言是一种沉没成本，必须扣除，这样多头的价值低于B-S-M模型理论价值，而空头相反。

考虑交易模型的期权定价主要是基于不同的复制策略和对冲技术。利兰(H.E.Leland)第一个提出了考虑交易成本的期权定价。莫顿提出有交易成本的二项式期权定价模型。戴维斯(M.Davis)和诺曼(A.Norman)提出了考虑效用函数的有交易成本的期权定价。总体来说，放松交易成本为零的假定的模型主要有两种思路：一是赫格(T.Hoggard)、威利(A.Whalley)和威尔莫特(P.Wilmott)提出的H-W-W模型。仍基于B-S-M模型的无套利和风险中性定价框架，但套期保值策略改为定期离散调整，从而得到一个非线性偏微分方程；二是赫杰斯(S.Hodges)、纽伯格(A.Neuberger)和戴维斯(M.Davis)等人提出的效用无差异定价方法，他们认为交易成本的存在已经动摇了风险中性的定价基础，因此必须重新引入投资者风险偏好和效用函数，但尚未得到易于应用的结论。

期权定价理论发展在多个方面不断深入。比如戈曼(M.Garman)和柯尔哈根(S.Kohlagen)以B-S-M模型为基础，提出外汇期权的G-K定价模型。布莱克提出的针对期货期权的Black定价模型。对于不完全市场下的期权定价采用的最优化套期保值、均值方差套期保值、超套期保值等方法。此外，综合性的改进也是一个方向，例如贝茨(D.Bates)将随机波动率和随机跳跃结合起来推导出的SVJ模型。而美式期权的解析解问题还没有取得突破性进展，主要采取数值方法去求解。

## 期权定价数值方法

期权定价理论和实践中常常无法或难以得到解析解，这时常采用各类数值方法来为期权定价。

#### 树形方法

树形方法本质上是动态规划方法的一种，包括二叉树、三叉树及多叉树等。最重要的当属由考克斯(J.Cox)、罗斯(S. A. Ross)、鲁宾斯坦（M.Rubinstein）于1979年首次提出的二叉树方法。二叉树方法实际上是B-S-M模型的离散版本。研究者最初的动机是以该模型为基础，为推导B-S-M模型提供一种简单直观的方法。随着研究的深入，二叉树不仅仅是解释和理解B-S-M模型的辅助工具，它成为期权定价方法中为复杂期权(如美式期权和奇异期权)定价的基本手段。

基本思路：

二叉树方法用离散的模型模拟资产价格的连续运动，将期权的期限分为许多很小的时间区间，在每一个区间里标的资产价格运动只有两个可能的方向：上涨或者下跌。利用资产收益率的期望和方差的匹配来确定相关参数，然后从二叉树的末端开始倒推期权价格。随着步数的增加，二叉树期权定价模型的分布函数就越来越趋向于正态分布，这趋于和B-S-M模型一致。二叉树的两个特点：可细分时间区间和离散化的树形结构倒推价格，这两点使得二叉树方法可以处理更为复杂的期权。比如美式期权在二叉树某个节点期权价格是以下两个价格之中的较大值：一个是立即执行的价格；一个是二叉树倒推到此点的价格。

优点：简单直观、能给美式等复杂期权定价。因此现已成为全世界各大期权交易所的主要定价标准之一。

缺点：精度取决于计算的步数，计算精度不高，计算效率较低。

随后有学者提出了类似的三叉树方法，这种方法讨论了二叉树方法的缺陷并进行修正，因此比二叉树方法更精确。三叉树方法及其改进的方法中引入了更多的参数和自适应网络模型思想。自适应的细化树形和更大的维数自由带来更有效的定价。

#### 蒙特卡洛模拟

蒙特卡洛方法的实质是模拟标的资产价格的随机运动，预测期权的平均回报，并由此得到期权价格的一个概率解。这是求解期权价格的典型模拟方法。

基本思路: 在已知标的资产价格分布函数的前提下，把期权的有效期限分为若干个小的时间间隔。以计算机为工具，模拟每个时间间隔资产价格的变动和可能路径，得到一个期权的最终价值，作为终值集合中的一个随机样本。如此重复大量模拟（上千次），将随机样本集合进行简单的算术平均就是期权的预期收益。由无套利定价原则，以无风险利率折现预期收益即当前时刻期权的价格：



其中，P表示期权的价格， r表示无风险利率，为T时刻期权的预期收益。

优点：能处理资产预期收益率和波动率函数复杂的情况，且模拟运算的时间随变量个数的增加呈线性增长，相对效率较高。使用不需要较高的数学准备，也无需太多的工作就可以转化模型。

缺点：只能用于欧式期权，不能用于可提前执行合约的美式期权定价。

精度取决于模拟运算次数，精度越高计算速度越慢。

#### 有限差分方法

有限差分方法是偏微分方程数值解的一种最常用技术。基本思路是：利用差分逼近，将期权价格所满足的偏微分方程转化为一组差分方程,再通过迭代求解。当今计算机非常普及，对于一些复杂的期权定价问题，此方法显示出很多优越性。隐式有限差分法的数值解具有较高可靠性，但待求解的方程数比较多，显式有限差分法对此进行了简化，更直接方便，可它的解有可能不收敛于偏微分方程的解。总的来看, 有限差分方法的基本思想与树形方法相似, 既可以用来求解欧式期权的价格又可以用来求解美式期权的价格。可证明显式有限差分法和三叉树法等价，隐式有限差分法和多叉树等价。

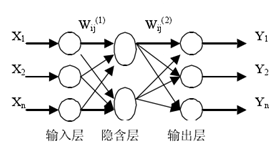
需要考虑的问题：一、收敛性问题-差分方程的解是否收敛到偏微分方程的解。二、稳定性问题-用计算机进行差分方程的求解时，难免在每次运行中引入舍入误差，这些舍入误差能否得到控制，有没有可能由于微小的舍入误差而引起解的完全失真。

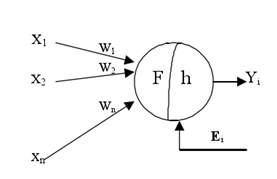
缺点：很难用于衍生产品与标的变量历史价格有关的情况。对于多标的变量的情形，计算时间会大大增加，较难适用。

#### 新兴方法：神经网络

人工神经网络(ANN)是一种非线性非参数模型, 由大量处理单元即神经元（Neurons）互相连接而成的网络，通过模拟人脑的基本特性，对人脑进行抽象、简化和模拟的一种工程系统。具有高速计算和学习的特性，在复杂系统的建模问题上表现出它的优越性,在预测评价等方面都取得了很好的应用效果。1943年，心理学家McCulloch W.和数理逻辑学家Pitts W.首次提出神经网络，至今理论和实践已经获得了巨大进步。对期权定价而言，神经网络可以记忆和学习之前的模拟或定价过程，提高效率，也可以结合遗传算法和小波分析等技术，以及人工智能、机器学习、并行计算等前沿领域的新型技术和研究成果。

B-S-M模型及基于它的不同改进都属于参数化模型，其不足是前提假设和参数设置时与实际的差异，这会带来期权定价的误差并削弱其适用性。例如标的资产价格变动的假定为布朗运动这点，于1988 年由Lo A.和MachinlaryA.通过实证数据分析所否定。为克服参数化模型的不足，在时变而复杂的非线性金融市场中更好的为期权定价，1994年Hutchinson J.，Lo A.和Poggio T.最早将神经网络模型引入到欧式期权的定价，发现这种定价的优势在于不必依赖于限制性参数的假设，该方法可以自适应结构的变化，适用于各种衍生工具。他们不仅对被估计模型的模拟数据训练神经网络，还使用该方法对样本以外的对冲期权定价，发现神经网络比B-S-M模型表现更出色，在性能和效果上得到了很好的结论。

 神经网络的基本原理：模拟生物神经网络系统，其信息的处理功能是由网路单元的输入输出特性、网络拓扑结构所决定的。对问题的求解方式不同于传统方法，是通过训练来解答问题。右图是一个典型神经网络连接模型。由输入层、隐含层和输出层三层神经元组成。相邻的两层之间的神经元都有一条带权值的弧线连接。为使神经网络求解问题，需要对其训练，这也称为网络学习。学习过程中，每条连接弧线动态的调节自己的权值，使得实际输出和期望输出中的误差减小。神经网络是一种非线性映射关系，各变量之间的关系隐含于网络当中。神经网络的学习算法很多，比如反向传播算法、Hopfield算法等。在非线性预测中最常用的是B-P算法



神经元结构：神经元是神经网络的基本计算单位。一般是一个多输入单输出的非线性单元。右图显示了一个完整的神经元的结构。其中是输入信息，是各弧的权值，h是阀值，F是激活函数，是反馈信息，是输出信息。

人工神经网络通过模拟神经元算法可以建立一个市场数据驱动的非线性模型并获得比参数模型更好的定价效果，这使期权定价更客观、更准确，从而为投资决策提供科学的定价依据。但它也有一些不足：（1）期权定价影响因素及样本数量还须改进。未来研究可采用实验设计或统计方法，找到其他影响因素，以更大的提高BP神经网络模型的精确度。（2）神经网络模型的隐含层神经元数目很难根据实际模型合理确定，这很可能会导致神经网络预测及自学习产生误差，使结果偏差较大，应结合实际，开展组合神经网络期权定价方法的深入研究。

#### 非完全市场下的期权定价方法

非完全市场不存在无套利复制的基础，因而建立在完全市场下的传统的期权定价方法就不再适用，比如B-S-M期权定价、二叉树和有限差分等方法就无法用于非完全市场下的期权定价。因为金融市场的不完全，期权的价格不是一个确定的值而是一个合理的区间。对于不完全市场下的期权定价的理论包括：最优化套期保值、均值方差套期保值、超套期保值。此时期权的定价的数值方法包括：区间定价、确定性套利、E-套利定价方法等方法。

数值计算方法各有其优缺点。蒙特卡罗模拟方法的优点在于能处理较复杂的情况且计算的相对效率较高，但由于该方法是由初始时刻的期权值推导未来时刻的期权值，它只能用于欧式期权的计算，而适于可以提前执行合约的美式期权。二叉树方法和有限差分方法是由期权的未来值回溯期权的初始值，因此可以用于美式期权的计算，但这两种方法不仅计算量大、计算效率低，而且难以计算期权依赖于状态变量历史路径的复杂情况。就二者之间的优劣比较而言，Geske-Shastrid的研究结果进一步表明，二叉树方法更适用于计算少量期权的价值,而从事大量期权价值计算时有限差分方法更有效率。在非完全市场情况下，衍生资产价格不是一个确定的值，而是一个区间。在完全金融市场情况下，这个区间就退化为一个点。确定性套利定价方法、区间定价方法和E-套利定价方法都既适用于完全金融市场，又适用于非完全的金融市场。数学的理论和工具被不断的应用到期权定价，比如常见倒向随机微分方程、快速傅立叶变换等。

期权定价中另外一个重要问题是定价模型中的市场参数估计。在期权定价模型中扩散系数、波动率、跳跃强度等的获取都是通过对市场数据的分析得出的，一个期权定价的准确性离不开对参数的估计，因而参数估计也是期权定价中的一个重要环节。除了传统的参数估计方法以外，引入辅助模型或半参数方法、基于贝叶斯原理的参数后验分布分析等方法都被应用到期权模型的参数估计。

## 小结

期权为代表的金融衍生品提高了国际金融市场的效率和流动性，扩展了市场的广度和深度，使得风险的转移和对冲更加便捷。另一方面也给市场带来全新的风险，并增强其脆弱性。这给市场监管和投资者都带来全新的挑战和机遇。目前期权理论研究的重点在于两个方向：一个是如何构造出新的期权，以满足不断变化的市场投资需要；另一个是如何确定这些日趋复杂的期权的价值，即给期权定价的问题。而后者一直是研究的重点。

标准化的场内期权交易仅有三十多年历史，但因期权具有良好的规避风险、风险投资、价值发现的功能，表现出灵活性和多样性的特点，使得期权成为最具活力的金融衍生产品，得到了迅速的发展和广泛的应用。期权的研究从先驱巴舍利耶到上世纪六十年代真正进入学者的视野，从B-S-M模型到神经网络等各类微分方程、动态规划和模拟，这些成果被广泛的运用于期权定价与经济和财务领域的研究。

无论是在连续时间模型框架下，还是在离散时间模型框架下；无论在完全市场假设下，还是在非完全市场假设下；无论是对欧式期权、美式期权、亚式期权的定价，还是对其它复杂的衍生资产的定价，期权定价所蕴含的无套利定价原则和风险中性定价都成为普遍适用的基本原则。有关各类期权定价的理论和方法还在不断的探讨和发展，数学的理论和方法、计算机的新技术、乃至行为和心理学的研究成果都被迅速和广泛的应用到期权定价这个领域。从诺贝尔经济学奖到每秒价值亿万的衍生品交易，期权定价这个领域就如期权本身，年轻而充满活力，必定会吸引更多的研究和关注，获得更大的发展。