

美式期权定价（一）—— 二叉树模型详解

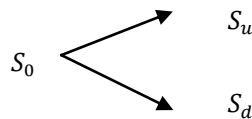
发布日期：2020年8月3日 分析师：刘超 电话：023-86769757 期货投资咨询证书号：Z0012924

介绍

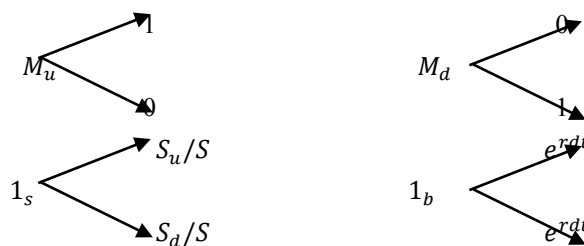
经典的期权定价模型 Black-Scholes 模型主要是针对欧式期权，对于美式期权，由于存在提前行权的可能性，经典的 Black-Scholes 模型不再适用，此时需要其他方法来完成相关定价，本文将介绍美式期权定价常用的二叉树方法。

一步二叉树的例子与说明

二叉树设想的是一种特殊的市场。在二叉树中，任意证券的价值变动在下一个时间点只存在两种情况，分别对应两种市场状态。所以我们可以用两个箭头，从期初价值分别指向这两种市场状态下的期末价值，来表示二叉树。比如，下图展示了一个证券 S 的二叉树：



图中， S_u 与 S_d 分别代表了下一时间点市场两种状态下 S 的价值。为了方便区分，我们把二叉树上末梢的状态叫做上行状态，另一个叫做下行状态。下面，我们假设存在 4 种证券。期末支付额直接与市场状态挂钩的 M_u 与 M_d ，以及允许我们投资某种证券以及无风险资产 1 元的证券 1_s 与 1_b 。其中， M_u 只在期末市场为上行状态的时候支付 1 元，而 M_d 只在下行状态支付 1 元[1]。使用二叉树，他们可以表示为：



如果证券 S 期末价值为 S_u 或者 S_d ，则期初投资一元的收益为 $U=S_u/S=e^u$ ， $D=S_d/S=e^d$ 。其中 u 与 d 分别代表两种市场状态的对数收益。对于无风险资产而言，它的收益不受市场状态影响，所以他的期末价值等于 $e^{rdt}=e^{-rdt}$ （这里的 dt 代表时间间隔）。观察上面的二叉树，我们可以发现，如果同时持有 M_u ， M_d ，那么无论遇到什么市场状态，都可以得到 1 元。这意味着持有者可以无风险地在未来收到一元，所以这种投资组合的价值等于 e^{-rdt} 单位的无风险资产：

$$M_u + M_d = e^{-rdt} = 1_b e^{-rdt} \quad (1.1)$$

我们可以通过线性组合的方式使用 1_s 以及 1_b 构建与 M_u 等价的资产组合，可以写成：

$$M_u = \alpha 1_s + \beta 1_b \quad (1.2)$$

要做到等价，就需要让资产组合二叉树的右边两项，也就是资产组合未来任何市场状况实现的价值与 M_u 完全一致，这需要我们解方程：

$$\begin{cases} \alpha U + \beta e^{rdt} = 1 \\ \alpha D + \beta e^{rdt} = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

这一组方程的解为：

$$\alpha = \frac{1}{U - D}; \quad \beta = \frac{-e^{-rdt} D}{U - D} \quad (1.4)$$

把解带入到 1.3 当中，得到 M_u 的值为：

$$M_u = \frac{1 - e^{-rdt} D}{U - D} = e^{-rdt} \frac{e^{rdt} - D}{U - D} \quad (1.5)$$

按照 1.1 中 M_u 与 M_d 的关系，可以得到 M_d 的值为：

$$M_d = e^{-rdt} - e^{-rdt} \frac{e^{rdt} - D}{U - D} = e^{-rdt} \left(1 - \frac{e^{rdt} - D}{U - D}\right) = e^{-rdt} \frac{U - e^{rdt}}{U - D} \quad (1.6)$$

通过简单的变换，这两个式子又可以写为：

$$M_u = e^{-rdt} q; \quad q = \frac{e^{rdt} - D}{U - D} \quad (1.7)$$

$$M_d = e^{-rdt} (1 - q); \quad 1 - q = \frac{U - e^{rdt}}{U - D} \quad (1.8)$$

这里的 q ，就是我们常说的风险中性概率，本质上说其不是一种概率，而是一种权重。风险中性概率就像真实概率一样，累加之和等于 1，但它既不与期望收益有关，也不与真实概率有关。我们经常把风险中性概率称为 Q 测度，把真实概率称为 P 测度[1]。根据定义，我们还可以得到：

$$q = \frac{e^{rdt} - D}{U - D} \Rightarrow qU + (1 - q)D = e^{rdt} \quad (1.9)$$

注意，我们之前定义： $U=S_u/S=e^u$ ， $D=S_d/S=e^d$ 。所以，将等式两边同时乘以 S ，可以得到：

$$S = e^{-rdt} (qS_u + (1 - q)S_d) \quad (1.10)$$

也就是说，证券的价值等于它在无风险测度下期望价值的折现值。并且，折现使用的是无风险利率。这个公式对期权也同样适用。假设期权在市场上行状态支付 C_u ，在下行状态支付 C_d 。而 M_u ， M_d 分别代表了“只在上行状态收获 1 元的证券”与“只在下行状态收获 1 元的证券”的折现价值。那么我们分别用 C_u 单

位个 M_u 与 C_d 单位个 M_d 构造一个投资组合，理论上它在期末任何市场状态的收获都与 C 完全一致。根据价格一致原则，该投资组合的价值也应当与 C 一致[1]。也就是说：

$$C = C_u M_u + C_d M_d = e^{-rt}(qC_u + (1 - q)C_d)$$

二叉树模型下期权的定价推导完毕。后面，我们将介绍如何确定每一步中标的上行与下行幅度来逼近标的所服从的连续分布，然后结合本文所讲二叉树模型来为美式期权进行定价。

引用

[1] Derman, E., & Miller, M. B. (2016). The volatility smile: An introduction for students and practitioners. Hoboken, NJ: Wiley.

联系我们

中信建投期货总部

地址：重庆市渝中区中山三路107号上站大楼平街11-B，名义层11-A，8-B4, C
电话：023-86769605

中信建投期货有限公司上海分公司

地址：中国（上海）自由贸易试验区浦电路490号，世纪大道1589号8楼10-11单元
电话：021-68765927

中信建投期货有限公司湖南分公司

地址：长沙市芙蓉区五一大道800号中隆国际大厦903
电话：0731-82681681

南昌营业部

地址：南昌市红谷滩新区红谷中大道998号绿地中央广场A1#办公楼-3404室
电话：0791-82082702

中信建投期货有限公司河北分公司

地址：廊坊市广阳区吉祥小区20-11号门市一至三层、20-1-12号门市第三层
电话：0316-2326908

漳州营业部

地址：漳州市龙文区九龙大道以东漳州碧湖万达广场A2地块9幢1203号
电话：0596-6161588

西安营业部

地址：西安市高新区高新路56号电信广场裙楼6层北侧6G
电话：029-89384301

北京朝阳门北大街营业部

地址：北京市东城区朝阳门北大街6号首创大厦207室
电话：010-85282866

北京北三环西路营业部

地址：北京市海淀区中关村南大街6号9层912
电话：010-82129971

武汉营业部

地址：武汉市江汉区香港路193号中华城A写字楼13层1301-06、07号
电话：027-59909521

中信建投期货有限公司杭州分公司

地址：杭州市上城区庆春路137号华都大厦811、812室
电话：0571-28056983

太原营业部

地址：太原市小店区长治路103号阳光国际商务中心A座902室
电话：0351-8366898

北京国贸营业部

地址：北京市朝阳区光华路8号和乔大厦A座向东20米
电话：010-85951101

中信建投期货有限公司济南分公司

地址：济南市历下区泺源大街150号中信广场A座六层611、613室
电话：0531-85180636

中信建投期货有限公司大连分公司

地址：辽宁省大连市沙河口区会展路129号大连国际金融中心A座大连期货大厦2901、2904、2905室
电话：0411-84806316

中信建投期货有限公司河南分公司

地址：郑州市未来大道69号未来大厦2205、2211、1910房
电话：0371-65612397

广州东风中路营业部

地址：广州市越秀区东风中路410号时代地产中心20层自编2004-05房
电话：020-28325286

重庆龙山一路营业部

地址：重庆市渝北区龙山街道龙山一路5号扬子江商务小区4幢24-1
电话：023-88502020

成都营业部

地址：成都市武侯区科华北路62号（力宝大厦）1栋2单元18层2、3号
电话：028-62818701

中信建投期货有限公司深圳分公司

地址：深圳市福田区深南大道和泰然大道交汇处绿景纪元大厦11I
电话：0755-33378759

上海徐汇营业部

地址：上海市徐汇区斜土路2899甲号1幢1601室
电话：021-64040178

南京营业部

地址：南京市黄埔路2号黄埔大厦11层D1、D2座
电话：025-86951881

中信建投期货有限公司宁波分公司

地址：浙江省宁波市鄞州区和济街180号国际金融中心F座1809室
电话：0574-89071681

合肥营业部

地址：合肥市包河区马鞍山路130号万达广场C区6幢1903、1904、1905
电话：0551-2889767

广州黄埔大道营业部

地址：广州市天河区黄埔大道西100号富力盈泰大厦B座1406
电话：020-22922102

上海浦东营业部

地址：上海自由贸易试验区世纪大道1777号3楼F1室
电话：021-68597013

重要声明

本报告中的信息均来源于公开可获得资料，中信建投期货力求准确可靠，但对这些信息的准确性及完整性不做任何保证，据此投资，责任自负。本报告不构成个人投资建议，也没有考虑到个别客户特殊的投资目标、财务状况或需要。客户应考虑本报告中的任何意见或建议是否符合其特定状况。

全国统一客服电话：400-8877-780

网址：www.cfc108.com